

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОвого ПОТОКА И СТРУКТУРЫ ПОДЛЕДНОГО СЛОЯ ВОДЫ НА ГРАНИЦЕ СО ЛЬДОМ В ЮЖНОМ БАЙКАЛЕ¹

© 2017 г. И. А. Асламов^{1,*}, В. В. Козлов², Г. Б. Кириллин³,
И. Б. Мизандронцев¹, К. М. Кучер¹, М. М. Макаров¹, Н. Г. Гранин¹

¹Лимнологический институт СО РАН
664033 Иркутск, ул. Улан-Баторская, 3

²Институт динамики систем и теории управления СО РАН
664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134

³Лейбниц-Институт водной экологии и внутреннего рыбоводства
12587 Berlin, Müggelseedamm, 301

*E-mail: ilya_aslamov@bk.ru

Поступила в редакцию 05.09.2016 г.

На основании экспериментальных данных и разработанной модели нарастания льда проведены оценки и исследована изменчивость теплового потока на границе вода–лед, играющего важную роль в формировании ледового покрова, но малоизученного из-за недостатка натуральных измерений вблизи границы фазового перехода с достаточным разрешением по температуре, пространству и времени, что восполняется данным исследованием.

Ключевые слова: физическая лимнология, лед, пограничный слой, тепловой поток, Байкал.

DOI: 10.7868/S0321059617030038

Интенсивность вертикального теплообмена в подледной воде и в системе вода–лед играет существенную роль в формировании ледового покрова, влияя на темпы его нарастания и деградации. Изменчивость теплового потока на границе вода–лед в течение ледового сезона в озерах мало исследована. Это связано с трудностями измерения потока тепла и его зависимостью от целого ряда физических процессов, в том числе от поглощения солнечной радиации, изменчивости температуры внутри ледового покрова и в подледном слое воды, а также интенсивности течений и турбулентности в водной толще.

Байкал – одно из крупнейших пресноводных озер на Земле, оно полностью покрыто льдом в течение 3–5 мес. в году. Ледовый режим играет важную роль в функционировании экосистемы озера. В течение зимнего сезона структура льда, а также мощность ледового и снежного покровов значительно изменяются по акватории озера, что позволяет одновременно проводить полевые исследования в разных условиях.

Систематические исследования ледового покрова оз. Байкал начаты в 1869–1876 гг. [15]. Первые эмпирические соотношения между толщи-

ной льда и температурой воздуха для оз. Байкал выведены А.А. Тресковым [29] и В.Л. Цуриковым [30]. Более поздние исследования были сосредоточены на структуре льда и его физических свойствах, а также на процессах нарастания и деградации ледового покрова в зимний и весенний периоды соответственно [3, 6, 7, 25].

Гидрологические исследования физических свойств подледного слоя воды [21] и подледной турбулентности [79] дали первые количественные оценки тепловых потоков в толще ледового покрова и в воде [22]. Проведены исследования светового режима оз. Байкал, изучено влияние толщины снежного покрова на интенсивность солнечной радиации в ледовом покрове и толще воды [14, 26, 31].

С помощью современных инструментальных методов впервые получена подробная информация о мелкомасштабном вертикальном перемещении озерных вод подо льдом [10, 11, 51], а также возможность исследовать механизмы генерации подледных течений [16, 17]. Позднее проводились исследования влияния толщины снежного и ледового покровов на освещенность под байкальским льдом и ее взаимосвязь с развитием зимнего фитопланктона [54].

В многочисленных публикациях, посвященных исследованию и моделированию процессов

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-55-12378 ННИО а), DFG (KI 853/11-1) и в рамках государственного задания № 0345-2014-0007.

образования ледового покрова пресноводных озер, основное внимание уделяется многолетней изменчивости ледового режима, связанной с изменениями климата [6, 37, 42, 61–64, 67, 70, 71]. При количественном описании тепловых процессов, обусловленных образованием льда и ростом его толщины, использовались главным образом одномерные аналитические [28, 73, 80] и полуаналитические [34] термодинамические модели. В обзорах аналитических [59, 60] и численных [58] моделей роста морского льда обсуждаются различные допущения при подходах к моделированию динамики ледового покрова и их недостатки, к которым можно отнести пренебрежение потоком тепла на границе вода–лед или его параметризацию в упрощенной форме [66], в то время как основное внимание направлено на определение зависимости толщины льда от температуры воздуха с неявным учетом влияния снежного покрова [8, 44, 45].

Вертикальный тепло- и массоперенос через пограничный слой вода–лед значительно влияет на рост и деградацию ледового покрова [56, 72]. Пренебрежение таянием льда вследствие теплового потока на границе вода–лед приводит к заметным ошибкам при моделировании фенологии озерного льда [40, 75]. Предыдущие исследования динамики пограничного подледного слоя воды были посвящены, в первую очередь, конвекции, вызванной объемным поглощением солнечной радиации [2, 47, 48, 72, 77], и, в меньшей степени, конвекции, обусловленной вымораживанием компонентов солевого состава в процессе нарастания льда [10, 51, 76]. Количественные данные о влиянии горизонтальных течений на толщину ледового покрова практически отсутствуют, хотя недавние исследования моделей толщины льда, учитывающих циркуляцию водных масс на Великих озерах [50, 74, 82], показали, что адекватное описание подледных течений значительно улучшает способность модели прогнозировать образование и разрушение ледового покрова. Исследования крупномасштабных подледных течений в озерах наводят на мысль о существенном влиянии квазистационарных циркуляционных ячеек на пространственное распределение толщины ледового покрова и интенсивности его нарастания и деградации [12, 13, 49, 57, 78]. Тем не менее их суммарный эффект в масштабах озера остается малоизученным.

Большое количество исследований направлено на получение оценок эффективного турбулентного теплообмена и величин коэффициентов вертикальной температуропроводности в покрытых льдом озерах [23, 43, 52, 65]. Результаты этих работ могут быть использованы в качестве косвенных оценок теплового потока на границе вода–лед.

Настоящая статья продолжает серию исследований подледной динамики в оз. Байкал [1, 35]. В работе представлен всесторонний анализ формирования и динамики теплового потока на границе вода–лед оз. Байкал на основе детальных натуральных измерений в 2016 г. Основное внимание уделено влиянию контрастных условий (по степени заснеженности ледового покрова и скоростям подледных течений) на формирование теплового потока на границе вода–лед и сопоставлению оценок тепловых потоков за весь период исследования. Для этого были проведены синхронные наблюдения на трех ледовых станциях.

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ГИДРОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для регистрации вертикального распределения температуры воздуха, толщи льда и воды в подледном слое, а также для измерения толщины ледового покрова и поступающей и проходящей под слой снега и ледовый покров солнечной радиации использовались автономные измерительные ледовые комплексы, разработанные сотрудниками лаборатории гидрологии и гидрофизики Лимнологического института СО РАН. Измерительная система состоит из 30 температурных датчиков, расположенных по вертикали с шагом 5 см во льду и 10–50 см – в воде и в воздухе. Система также включает в себя три датчика освещенности, находящихся в воздухе на расстоянии 1.5 м от поверхности льда, на его поверхности и на расстоянии 1.5 м от нее в подледной воде.

Для измерения толщины льда по принципу обратного эхолота в верхнюю крышку корпуса с регистратором встроены излучающий и приемный гидроакустические преобразователи. Сам регистратор подвешивается на тросе в воде на фиксированном расстоянии от поверхности льда. Суть метода измерения заключается в излучении в воду модулированного акустического импульса, отражающегося от нижней кромки льда и регистрируемого приемником. Зная время, прошедшее между излучением и приемом, а также скорость звука, можно вычислить расстояние до границы вода–лед, следовательно, и толщину льда. Несущая частота излучаемого импульса составляет 330 кГц. Прием осуществляется высокоскоростным аналого-цифровым преобразователем (АЦП) с частотой преобразования 16 МГц. Таким образом, в приборе регистрируется форма эхосигнала, что позволяет проводить его цифровую обработку. При этом применяется специально разработанный алгоритм корреляционного детектирования момента прихода отраженного импульса, дающий возможность достичь высокую точность измерения расстояния. Профиль скорости звука в воде рассчитывается по уравнениям TEOS [69] с использованием вертикального рас-

пределения температуры по данным термодатчиков.

Разрешающая способность комплекса по измеряемым параметрам: температура воздуха, льда, воды – 0.002°C , интенсивность солнечной радиации – 0.1 Вт/м^2 , толщина льда – 0.1 мм (рабочий диапазон $0.2\text{--}2.8 \text{ м}$). Комплекс собирает информацию с датчиков с периодом 2 мин , записывает на карту памяти типа *micro SD* и передает в реальном времени по сотовым каналам связи на удаленный интернет-сервер. Энергоресурс прибора обеспечивает более чем четырехмесячную автономную работу.

Для измерения течений использовался трехмерный гидроакустический доплеровский профилограф “ADP Poseydon фирмы SonTek” (ADP) со следующими характеристиками: диапазон скоростей – $\pm 10 \text{ м/с}$; разрешение – 0.1 см/с , точность измерений – $\pm 0.5 \text{ см/с}$, диапазон глубин измерения – 70 м , максимальная глубина погружения – 600 м . Профилограф располагали на глубине 50 м излучателями вверх. Параметры режима измерения следующие: вертикальный размер ячейки – 2 м , количество ячеек – 30 , время осреднения – 3 мин . Дополнительно применялся двухмерный электромагнитный измеритель течений “INFINITY-EM” (“JFE Advantech Co., Ltd.”): диапазон скоростей – $\pm 5 \text{ м/с}$, разрешение – 0.02 см/с , точность измерений – $\pm 1 \text{ см/с}$, максимальная глубина погружения – 1000 м . Измеритель располагали на расстоянии 1.5 м от поверхности ледового покрова.

МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ЛЕДОВОГО ПОКРОВА

Для интерпретации результатов измерений *in situ* термического режима ледового покрова на Байкале разработана математическая модель вертикального переноса тепла в двухслойной системе с фазовым переходом (задача Стефана). Подход к решению задач такого класса основан на связи между прямыми методами решения в обобщенной формулировке классической задачи Стефана с разрывными (кусочно-непрерывными) коэффициентами [4, 24, 28] и методами решения обратных задач с гладкими коэффициентами без фазовых переходов. Модель использовалась в двух вариантах. Прямое решение задачи Стефана с заданными коэффициентами применялось для оценки влияния температуры воздуха, солнечной радиации и теплообмена в толще льда и подледной воде (в том числе скрытого и явного потоков тепла на границе вода–лед) на изменчивость температуры в системе вода–лед. Решение обратной задачи Стефана на основе измеренных толщины льда, поступающей солнечной радиации и температуры толщи льда и подледного слоя воды в системе вода–лед использовалось для расчета коэф-

фициентов эффективной температуропроводности и оценки вертикального распределения потоков тепла. Характеристики эффективного вертикального теплообмена подо льдом определялись и верифицировались с использованием экспериментальных данных.

Прямая постановка задачи Стефана

Постановка задачи о динамике роста и таяния ледового покрова и сопряженных с ней явлений выполнена в рамках упрощенной схемы, в которой решающая роль отводится тепловым процессам и фазовым превращениям. Она представляет собой вариант задачи Стефана для системы квазилинейных параболических уравнений в области со свободными границами. Рассматриваемое явление описывается в локальной системе координат, жестко связанной с поверхностью льда. Начало координат совмещено с этой границей, ось z направлена вниз. Поскольку изменение потенциальной температуры

$$\Theta(x, y, z, t) \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \equiv T(z, t)$$

по вертикали значительно больше, чем по другим направлениям, то процесс теплопереноса описывается как одномерный. Отметим, что в рассматриваемом случае различие между значениями потенциальной и *in situ* температуры незначительно.

Прямая постановка одномерной двухфазной задачи Стефана состоит в определении температуры $T(z, t)$ и границы фазового перехода $\xi(t)$ в области $0 \leq z \leq l$ в интервале времени $0 \leq t \leq t_{\max}$. Решение задачи сводится к интегрированию системы уравнений [4, 9, 28]:

$$c_j(T) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_j(z, T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = f_j(z, t), \quad (1)$$

где функции $c_j(T(z, t))$ и $k_j(z, T(z, t))$ – соответственно объемная теплоемкость и теплопроводность, $a_j f_j(z, t)$ – объемное поглощение солнечной радиации. Индексы j – ice, wat соответствуют льду [$0 \leq z \leq \xi(t)$] и воде [$\xi(t) \leq z \leq l$] соответственно.

В начальный момент ($t = 0$) задан вертикальный профиль температуры $\phi(z)$

$$T(z, 0) = \phi(z) \text{ при } 0 \leq z \leq l \quad (2)$$

и положение границы фазового превращения

$$\xi(0) = l_0. \quad (3)$$

На границе воздух–лед ($z = 0$) задана температура $\theta(t)$

$$T(0, t) = \theta(t), \quad 0 \leq t \leq t_{\max}. \quad (4)$$

На нижней границе ($z = l$) задан поток тепла $Q_w(t)$

$$\left(-k_{\text{wat}}(z, T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=l} = Q_w(t) \quad 0 < t \leq t_{\max}. \quad (5)$$

На нижней границе фазового перехода вода–лед ($z = \xi(t)$) задана фиксированная температура $T^* = 0^\circ\text{C}$

$$T(z, t)|_{z=\xi(t)} = T^* \quad 0 < t \leq t_{\max} \quad (6)$$

и баланс тепла или условие Стефана [28]

$$-\gamma \frac{d\xi}{dt} = k_{\text{wat}}(z, T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\xi(t)+0} - k_{\text{ice}}(z, T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\xi(t)-0} \quad (7)$$

$$0 < t \leq t_{\max},$$

$\gamma = \rho_{\text{ice}}L$ – объемная скрытая теплота фазового превращения ($L = 333.5$ кДж/кг – теплота плавления льда). Теплопроводность льда $k_{\text{ice}}(T)$ изменяется линейно между значениями $k_{\text{ice}}(0^\circ\text{C}) = 2.23$ Вт/(м °C) и $k_{\text{ice}}(-30^\circ\text{C}) = 2.32$ Вт/(м °C).

В прямой постановке краевой задачи начальные условия: $\phi(z)$, l_0 и граничные условия: верхнее – $\theta(t)$ и нижнее – $Q_w(t)$ вычислены по экспериментальным данным о температуре поверхности льда, толщине льда и температуре подледной воды. Термодинамические характеристики воды $c_{\text{wat}} = C_p \text{ wat}(T) \rho_{\text{wat}}(T)$ и льда $c_{\text{ice}} = C_p \text{ ice}(T) \rho_{\text{ice}}(T)$, γ и их плотности $\rho_{\text{wat}}(T)$, $\rho_{\text{ice}}(T)$ соответственно рассчитывались с использованием эмпирических зависимостей [69].

Вертикальные профили эффективной теплопроводности воды $k_{\text{wat}}(z, T(z, t)) = C_p \text{ wat}(T) \rho_{\text{wat}}(T) a_{\text{ef}}(z)$ (a_{ef} – эффективная температуропроводность аппроксимирована зависимостями для подледной воды в Лиственничном зал. (Южный Байкал), приведенными в работе [79]: $a_{\text{ef}} = 3 \times 10^{-7}$, 9×10^{-7} и 16×10^{-7} м²/с для глубины 0.1, 0.5 и 1 м от нижней кромки льда соответственно [33, 79]). Величины, в 5–10 раз превышающие молекулярное значение температуропроводности, согласуются с данными, полученными для покрытых льдом озер [36, 41, 43, 68, 81].

Оценки лучистого потока тепла основывались на данных исследования подледного светового режима водоемов [31] и проникающей солнечной радиации на Байкале [14]. Влияние толщины снежного покрова на освещенность под байкальским льдом учитывалось по данным [31, 54]. Объемное поглощение солнечной радиации $f_j(z, t)$, проникающей в лед и подледную воду, принято для ледового покрова, представленного бесснеж-

ным однородным прозрачным льдом, который относится к типу I по классификации П.П. Шерстянкина [31] или к “black ice” – по М. Леппаранта [59]. При этом пренебрегали влиянием на прохождение солнечной радиации под границы вода–лед и считали, что углы полного внутреннего отражения для льда и воды на их границах с воздухом совпадают. Тогда световое поле в толще однородного прозрачного покрова и в верхних слоях воды будет таким же, как в водоеме при штилевой погоде. Таким образом, модель ледового покрова соответствует теоретическим идеализациям проникновения светового излучения в воду, и для нее справедливы с небольшими поправками результаты, полученные для измерений, выполненных при штиле [14].

Кривые изменения с глубиной проникающей в воду Байкала радиации для разной прозрачности представлены суммой экспонент [14] в соответствии с формулой Колесникова [18]:

$$R_{\text{ice}}(z, t) = R_{\text{tot}}(t) A_{\text{ice}} \exp(-\beta_{\text{ice}} \times z),$$

$$R_{\text{wat}}(z, t) = R_{\text{ice}}(\xi(t), t) \times \sum_{\alpha=1}^3 B_{\alpha} \exp(-\beta_{\alpha} \times (z - \xi(t))), \quad \sum_{\alpha=1}^3 B_{\alpha} = 1,$$

R_{tot} – падающая солнечная радиация на поверхность льда; R_{ice} , R_{wat} – проникающая соответственно в лед и воду солнечная радиация; B_{α} , % – доля спектра с постоянным показателем вертикального ослабления β_{α} ; для Байкальского льда $\beta_{\text{ice}} \approx 1.6$ м⁻¹ – близок к β для прозрачного льда в области его минимальных значений для различных типов льда [23]. Коэффициент $A_{\text{ice}} = 0.15$ отвечает за показатели поверхностного отражения и поглощения. Эта формула справедлива для верхних слоев водной толщи озера, где угловую структуру светового поля можно считать практически неизменной. Значения коэффициентов B_{α} и β_{α} для ясной и пасмурной погоды, использованные в расчетах, приведены в таблице. Объемное поглощение проникающей солнечной радиации $f_j(z, t)$ в уравнении (1) представляет собой производную $-\partial R_j / \partial z$.

Обратная задача

Необходимость постановки обратной задачи обусловлена отсутствием данных о значениях коэффициентов вертикального теплообмена в подледном слое воды и, как следствие, о потоках тепла на границах. В обратной задаче начальные условия (2), (3) и граничный режим (4) при $z = 0$ известны по результатам измерений, а на границе $z = l$ вместо условия (5) задана температура:

$$T|_{z=l} = \psi(t) \quad 0 \leq t \leq t_{\max}, \quad (8)$$

Коэффициенты B_{α} и β_{α} для глубины по диску Секки 10 м [14]

Погода	β_1	β_2	β_3	B_1	B_2	B_3
Солнечная	1.4	0.27	0.101	30	58.33	11.67
Пасмурная	0.67	0.23	0.08	40	51.67	8.33

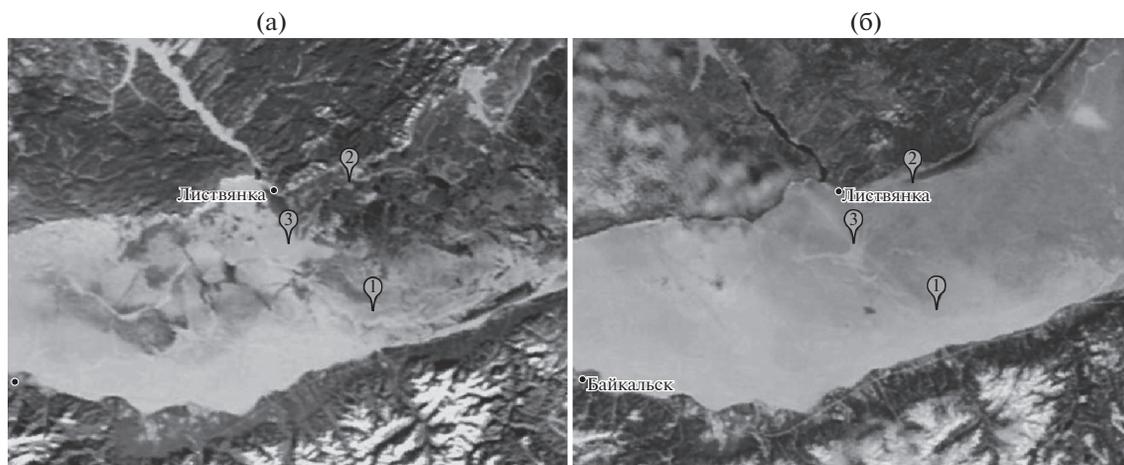


Рис. 1. Местоположение измерительных станций и ледовая обстановка на Южном Байкале 24 января (а) и 4 апреля (б) 2016 г.

$\psi(t)$ — температура, измеренная температурным датчиком на глубине $z = l$. Дополнительная входная информация задана для интервала $0 < z < l$ измеренными значениями температуры в m точках:

$$T|_{z=z_n} = \psi_n(t) \quad n = 1, 2, \dots, m \quad 0 \leq t \leq t_{\max} \quad (9)$$

и изменением во времени толщины льда:

$$\xi(t) = g(t) \quad 0 \leq t \leq t_{\max}, \quad (10)$$

$g(t)$ — толщина льда, измеренная автоматическим ледовым комплексом. Тогда обратная задача сводится к определению:

функции $T(z, t)$, удовлетворяющей (1)–(4) и (6)–(8) для жидкой и твердой среды;

коэффициента эффективной теплопроводности подледного слоя воды;

потоков тепла в толще льда и в подледной воде, включая нахождение граничного условия (5).

Как известно, обратные задачи идентификации коэффициентов даже для линейных уравнений теплопроводности являются нелинейными. Это обстоятельство существенно осложняет построение вычислительных алгоритмов для приближенного решения коэффициентных и граничных обратных задач. Поскольку в данном случае полное и строгое обоснование их сходимости практически невозможно [24], основное внимание уделяется максимально широкой апробации численных методов на содержательных практических примерах по экспериментальным данным.

Для решения обратной задачи краевая задача Стефана с кусочно-непрерывными коэффициентами эффективной теплопроводности и условием на границе фазового перехода (7) заменена на обобщенную формулировку задачи Стефана с гладкими коэффициентами без фазовых переходов [4, 24, 35]. Приближенное решение об-

ратной коэффициентной задачи с дополнительной информацией (8)–(10) находили с применением методов параметрической идентификации [24]. Распределение эффективной теплопроводности (a_{ef}) по координате z аппроксимировали кусочно-линейной функцией с неизвестными параметрами. Приближенное решение при этом находится минимизацией квадратичного сглаживающего функционала А.Н. Тихонова для вектора неизвестных параметров [24, 27].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Гидрометеорологические условия

Комплексные исследования динамики роста ледового покрова проведены в январе–апреле 2016 г. Вертикальное распределение температуры в системе воздух–лед–вода определялось на трех станциях на Южном Байкале (рис. 1) с одновременной регистрацией толщины льда и проходящей солнечной радиации. Станция 1 была установлена в 8 км от пос. Танхой в районе с повышенной заснеженностью и небольшими скоростями течений и дополнительно оборудована измерителем течений INFINITY-EM; начальная толщина льда составляла 32 см. Станция 2 располагалась в 4 км от пос. Большие Коты в районе со сравнительно высокими скоростями подледных течений и была оборудована доплеровским профилографом ADP Poseidon; начальная толщина льда составляла 31 см. Станция 3 была установлена в 10 км от пос. Листвянка при начальной толщине льда 19 см без измерителя течений. По техническим причинам со станции 3 нет данных с 29 января по 06 февраля.

Гидрологические и метеорологические условия в течение эксперимента были существенно нестационарны, что выражалось в нерегулярных

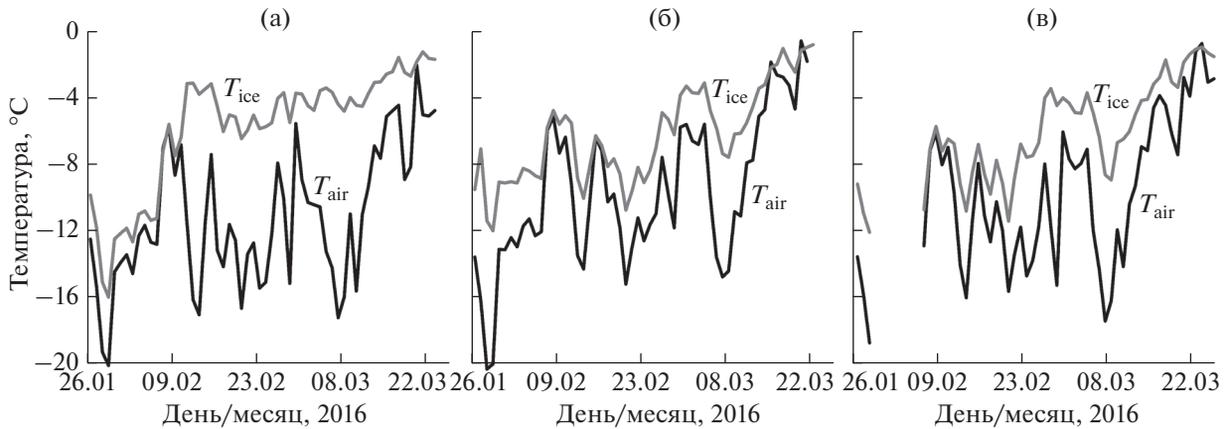


Рис. 2. Среднесуточная температура воздуха на высоте 1.5 м над льдом T_{air} и среднесуточная температура поверхности льда T_{ice} для станций 1–3 (а–в соответственно).

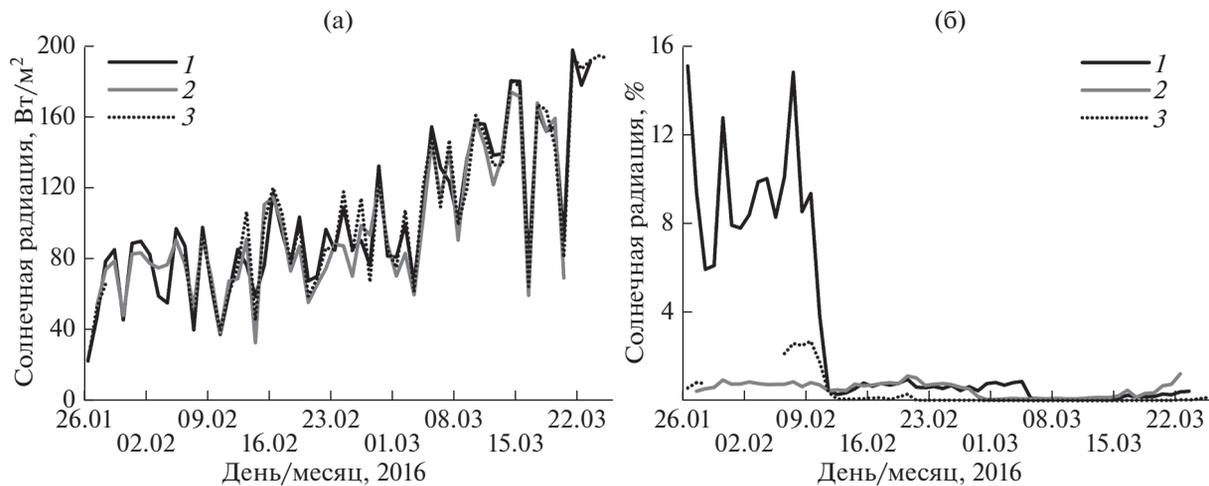


Рис. 3. Среднесуточная приходящая солнечная радиация (а); доля, %, проникающей под лед среднесуточной солнечной радиации (б). 1–3 – номера станций.

изменениях температуры воздуха, льда и подледной воды, а также приходящей солнечной радиации (рис. 2–4). Измерители течений работали не все время эксперимента (рис. 10б). В среднем скорости потока на станции 2 примерно в два раза превышали значения на станции 1. Значения температуры воздуха и приходящей солнечной радиации были примерно одинаковы для всех трех станций. Но из-за неравномерности снежного покрова значения температуры на поверхности льда довольно сильно различались между станциями и, как следствие, их разница с температурой воздуха варьировала от 0 до 10°C (рис. 2).

При установке измерительных комплексов в местах наблюдений изначально лед был мало заснеженным (рис. 1а). Под лед проникало от 1 до 15% поступающей радиации (рис. 3б). После снегопада 11 февраля доля проникающей под лед ра-

диации на всех станциях стала <1% и оставалась такой до конца марта. Наибольшее количество снега выпало на станции 1 (изначально с самым чистым ледовым покровом), о чем свидетельствует заметно большая разница между значениями температуры воздуха и поверхности льда по сравнению со станциями 2 и 3 (рис. 2).

На станции 1 температура воды на протяжении времени измерений оставалась низкой и не превышала 0.1°C (рис. 4). Это обусловлено поступлением вод из более заснеженной и менее прогретой западной части Южного Байкала. В то же время на станции 2 сразу после постановки приборов установился устойчивый прогрев подледной воды, вызванный постоянным поступлением теплых вод из менее заснеженной северо-восточной части Южного Байкала (рис. 1а), чему способствует общебайкальское циклоническое

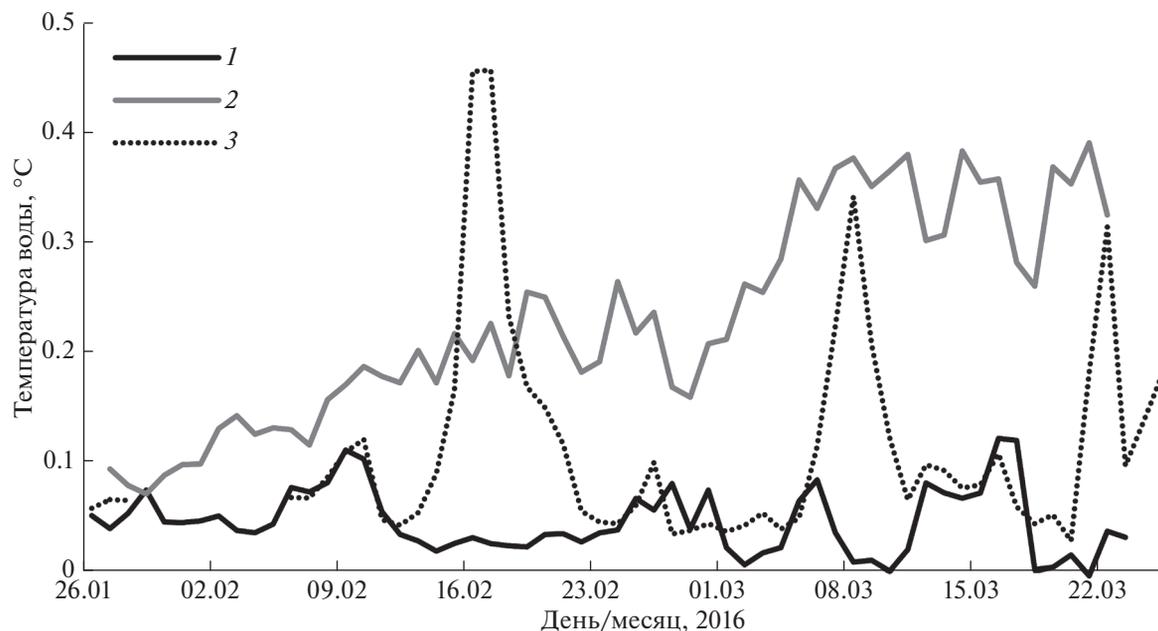


Рис. 4. Среднесуточная температура воды в слое 5–10 см подо льдом. 1–3 – номера станций.

течение. Средняя скорость прогрева составила 0.005°C в сутки. Станция 3 находилась под влиянием двух вторичных циркуляционных ячеек подледных течений [5], и на ней наблюдалась большая неравномерность временного хода температуры подледной воды, обусловленная периодическими интрузиями теплой воды из северо-восточной части Южного Байкала (рис. 1а, 4).

Толщина ледового покрова

В период измерений на станциях 1 и 3 наблюдался согласованный процесс нарастания ледового покрова. При этом на станции 3 с очередным приходом теплой воды к концу марта началась деградация льда (рис. 4, 5). Коренным образом от них отличается динамика толщины льда на станции 2. При начальной толщине льда, что и на станции 1, ледовый покров нарастал намного медленнее, несколько раз останавливаясь, а с марта лед начал деградировать. Это связано как с более теплой подледной водой (рис. 4), так и с более интенсивными течениями в этом месте (рис. 10б). В результате к концу марта вдоль северного берега озера образовалась проталина, отчетливо выделяющаяся на спутниковом снимке и проходящая через станцию 2 (рис. 1б).

Динамика изменения толщины ледового покрова $\xi(t)$, рассчитанная по модели (1)–(7) для станций 1 и 2, хорошо согласуется с измеренными значениями (рис. 5). Немного худшее согласование результатов для станции 2 может быть объяснено наличием значительных горизонтальных

течений (рис. 10б), в то время как модель описывает только вертикальный обмен.

Вертикальная структура подледного слоя воды

В соответствии с теоретическими представлениями [19, 20, 32, 55], в вертикальной структуре подледной воды выделяют: подледный вязкий ламинарный слой, залегающий под ним переходный (“буферный”) слой и перемешанную турбулентную толщу (конвективный слой). В каждом из слоев вертикальный перенос определяется разными механизмами и, соответственно, имеет свои временные и пространственные масштабы. В тонком ламинарном слое вблизи твердой (верхней) границы подледного пограничного слоя вертикальный обмен определяется молекулярным диффузионным переносом. Интенсивность тепло- и массообмена на границе вода–лед определяется толщиной ламинарного слоя, которая зависит от интенсивности перемешивания в нижележащих слоях, обусловленного конвекцией и сдвиговой неустойчивостью подледных течений. В свою очередь, подвижная граница лед–вода — является источником/стоком тепла за счет фазового перехода, а также источником растворенного вещества (вымораживаемых солей). Построенные профили температуры подледной воды в зависимости от расстояния H от нижней подвижной границы льда для станций 1 и 2 близки к логарифмическому закону с выраженным переходным слоем, за пределами которого значения температуры выравнены по вертикали конвективным перемешиванием за счет объемного по-

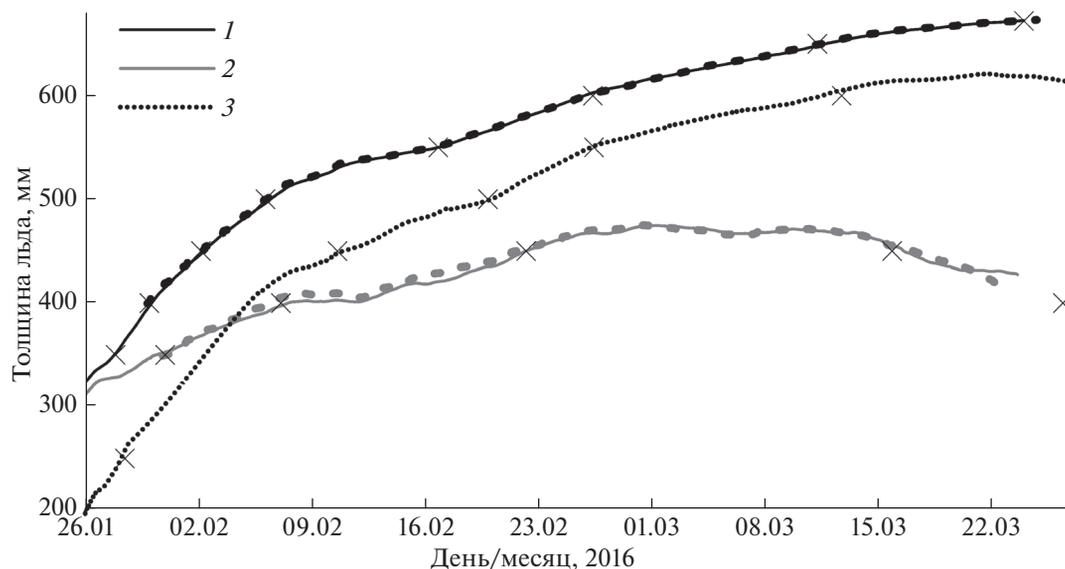


Рис. 5. Измеренная толщина льда на станциях 1–3 и ее значения $\xi(t)$, рассчитанные по модели (штриховые линии). Маркерами (×) показаны моменты вморзания в лед и вытаивания температурных датчиков. В период деградации ледового покрова непосредственно у термоксы происходит подмыв льда, вследствие чего вытаивание датчиков происходит несколько раньше основного тренда, измеренного толщиномером.

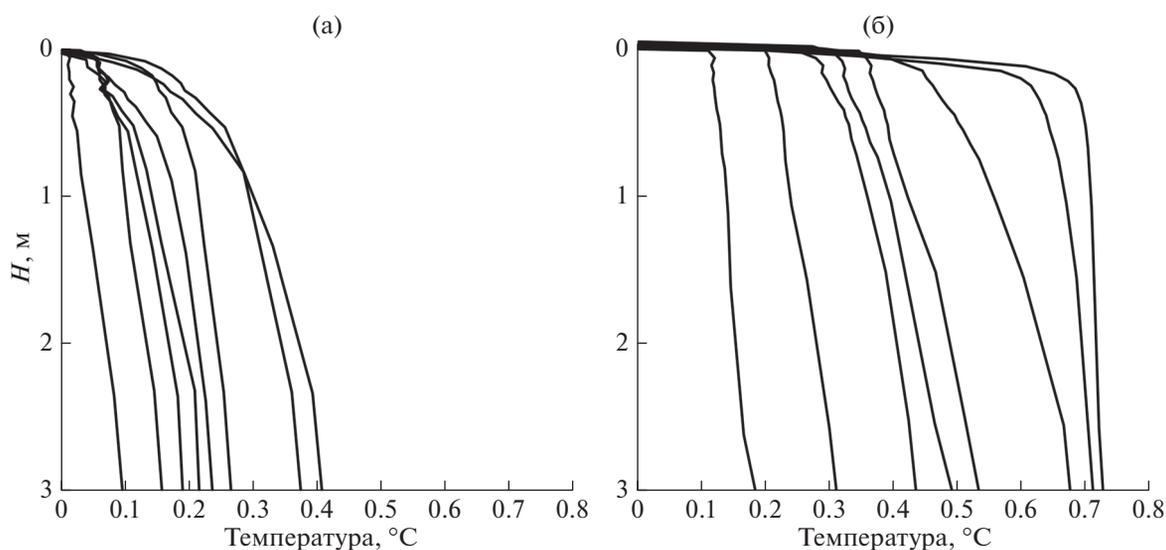


Рис. 6. Профили температуры подледной воды на станциях 1 (а) и 2 (б).

глощения проникающей радиации и вымораживания солей при намерзании льда (рис. 6).

На станции 1 граница между переходным и конвективным слоем располагается, как правило, значительно глубже и достигает 2–3 м, что вызвано меньшей интенсивностью подледных течений и меньшей радиационной конвекцией по сравнению со станцией 2, на которой перемешанный слой начинается с глубин 0.1–0.3 м. Аналогичные выровненные по вертикали профили солености и температуры в конвективном слое воды получе-

ны при измерениях в дневные часы на оз. Вендюрском [72].

При нарастании толщины ледового покрова нижняя граница льда приближается к датчикам, исходно расположенным в воде, что эквивалентно движению датчиков к границе вода–лед. Датчики последовательно переходят из нижнего турбулентного слоя в буферную зону, затем – в ламинарный пограничный слой и, наконец, вмораживаются в лед. Таким образом, наличие детальных измерений толщины ледового покрова позволяет пере-

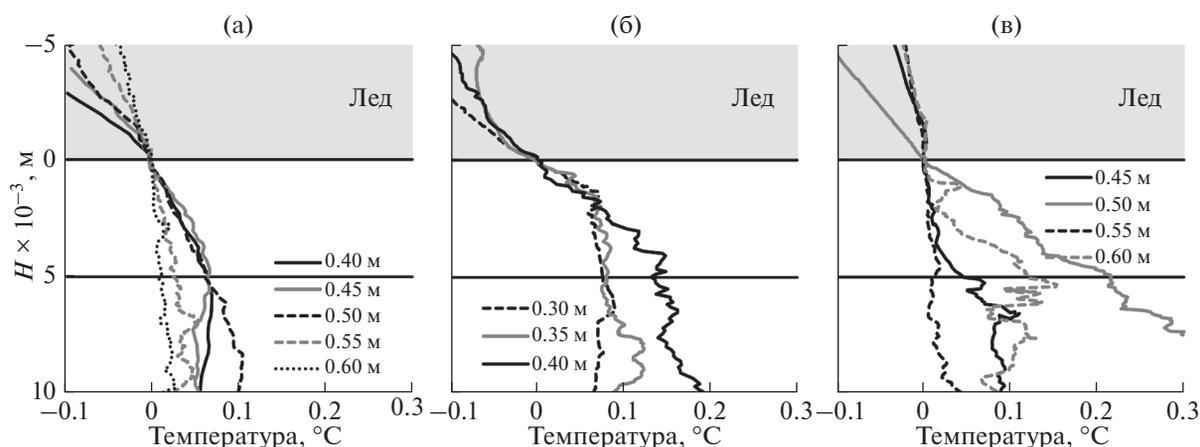


Рис. 7. Профили температуры в нижней части ледового покрова и подледном слое воды для станций 1 (а), 2 (б) и 3 (в), полученные при вмерзании датчиков.

считать зависимость температуры от времени в ее зависимости от расстояния датчика относительно нижней подвижной границы льда и построить подробные профили температуры в районе границы вода–лед (рис. 7). Данные по температуре и толщине льда предварительно усреднялись за 20 мин.

На полученных профилях можно выделить вязкий ламинарный подслой с изменением температуры, близким к линейному. На станции 1 в тонком подледном слое воды преобладают меньшие градиенты температуры и его величина достигает 5 мм, в то время как на станции 2 толщина слоя не превышает 2 мм и имеют место значительно большие градиенты температуры. На станции 3 наблюдалась большая изменчивость подледной температуры, вызванная периодическими интрузиями теплой воды. Для сравнения, в небольших озерах толщины вязкого ламинарного подслоя и переходного слоя оценивались в 0.05 и 0.60 м соответственно [37, 43, 46]. Таким образом, вязкий ламинарный подслой в подледной воде в Байкале заметно тоньше.

Коэффициенты температуропроводности

Значения эффективной температуропроводности, определенные при численном решении обратной задачи Стефана, возрастают с глубиной (рис. 8), что качественно согласуется с результатами предыдущих исследований покрытых льдом озер, но скорость роста значительно превышает полученные ранее величины. На малых озерах Карелии значения $a_{ef}(z)$ на глубине 2 м были приблизительно в 3–5 раз выше, чем молекулярные значения [37]. Для небольшого оз. Райан (Ruan Lake) коэффициенты температуропроводности варьировали от 1.3×10^{-7} м²/с непосредственно подо льдом до 8.9×10^{-7} м²/с в конвективном слое

на глубине 2.4 м [43, 46]. Большие значения $a_{ef}(z)$ – 1.0×10^{-5} и 2.0×10^{-6} – 4.0×10^{-6} м²/с приведены Л. Бенгтссоном для мелких озер Велен и Борен (Швеция) соответственно [38]. В экспериментах авторов статьи значения эффективной температуропроводности выше на один–два порядка и достигают 10^{-5} – 10^{-3} м²/с, что согласуется с гораздо меньшими размерами ламинарного подледного слоя на оз. Байкал. На станции 2 подледный обмен был примерно в два раза более интенсивным, чем на станции 1, и более изменчив как по величине, так и по направлению.

Потоки тепла в системе вода–лед

Численное решение обратной задачи позволило получить вертикальное распределение плотности потока тепла для двух станций (рис. 9). Горизонтальные скачки в точках фазового перехода на кривых потока тепла, соответствующие изменениям потока тепла, вызванным выделением или поглощением скрытой теплоты за счет фазового превращения воды в лед и наоборот (нарастание или таяние ледового покрова), хорошо согласуются с зарегистрированной динамикой толщины ледового покрова (рис. 5).

Полученные авторами статьи регулярные данные о динамике толщины ледового покрова и его температуре позволяют провести независимую оценку потока тепла из воды в лед по аналитическому условию Стефана (7) на границе фазового перехода. Поскольку, согласно данным авторов статьи, вертикальное распределение температуры в нижней части ледового покрова практически линейно, используя показания нижнего вмерзшего температурного датчика, находящегося на горизонте $h_j = 0.05(j - 1)$ (j – номер датчика на термокосе) во льду, среднюю плотность теплово-

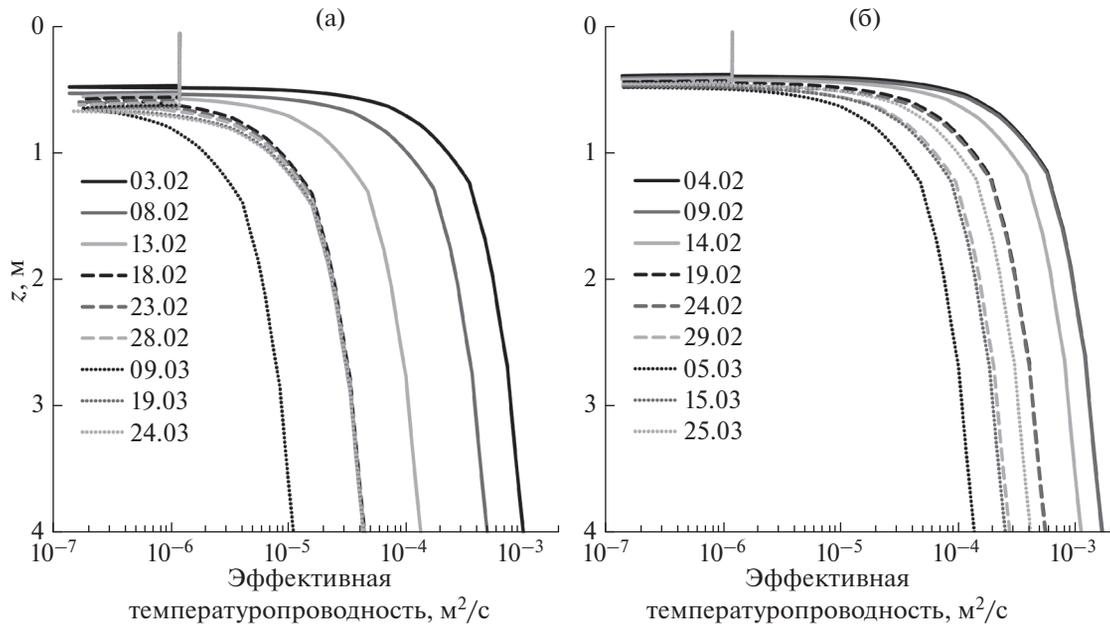


Рис. 8. Вертикальное распределение эффективной теплопроводности в системе вода–лед в разные даты для станций 1 (а) и 2 (б).

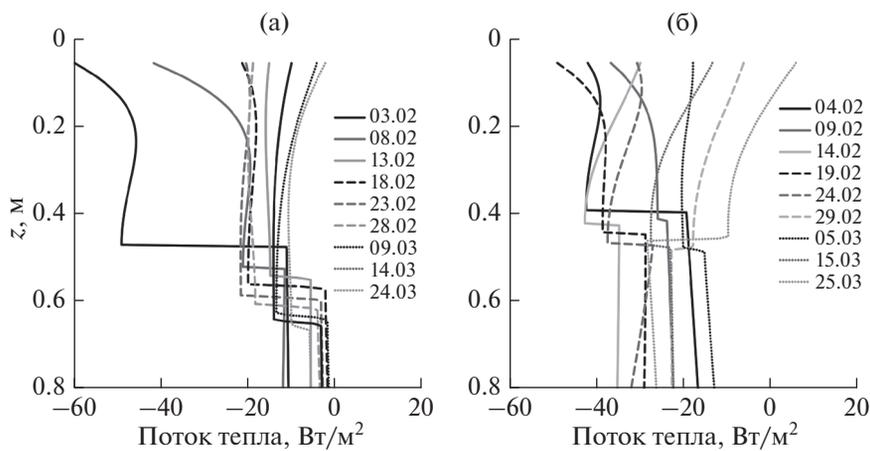


Рис. 9. Вертикальное распределение плотности потока тепла в системе вода–лед в разные даты для станций 1 (а) и 2 (б).

го потока из воды в лед Q_{wat} за промежуток времени Δt можно представить в виде:

$$Q_{wat} = k_i \frac{\bar{T}(\xi) - \bar{T}(h_j)}{\xi - h_j} - \rho_i L \frac{\Delta \xi}{\Delta t}, \quad (11)$$

t – время, $\xi(t)$ – координата границы фазового перехода вода–лед, $T(z, t)$ – температура, k_i – коэффициент теплопроводности льда, ρ_i – плотность льда, L – скрытая теплота фазового перехода. Для фазового перехода в случае пресной воды температура на нижней границе льда $\bar{T}(\xi) = 0^\circ\text{C}$.

А также, несмотря на нестационарность условий и, как следствие, изменений толщины ламинарного слоя во время пересечения его отдельными датчиками, по профилям подледной температуры (рис. 7) можно определить градиенты температуры в вязком ламинарном подслое и оценить плотность теплового потока другим способом:

$$Q_{wat} = k_{wm} \frac{\Delta T}{\Delta z} = k_{wm} \frac{T(h_j) - T(\xi)}{h_j - \xi}, \quad (12)$$

k_{wm} – коэффициент молекулярной теплопроводности воды ($0.569 \text{ Вт/м}^2 \text{ }^\circ\text{C}$).

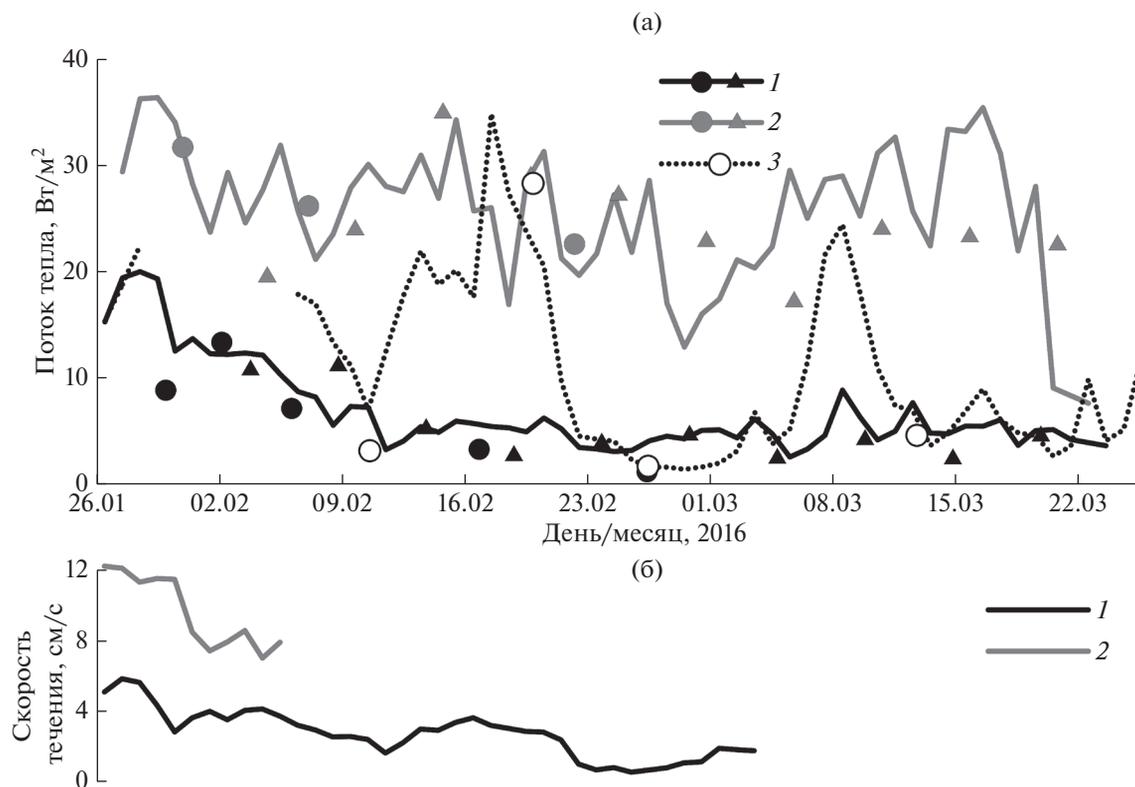


Рис. 10. а – рассчитанные среднесуточные потоки тепла на границе вода–лед по тепловому балансу на границе (формула (11)), круглые маркеры – мгновенные значения, определенные по градиенту температуры в тонком подледном слое воды в моменты вмержания термодатчиков (формула (12)), треугольные маркеры – мгновенные значения, восстановленные по решению обратной задачи (1)–(7) с дополнительными условиями (8)–(10); б – среднесуточные модули скорости подледных течений для станций 1 и 2.

Потоки тепла, рассчитанные тремя методами (уравнения (1)–(7), (11) и (12)), хорошо согласуются между собой (рис. 10а). Поток тепла на станции 2 значительно превышает поток на станциях 1 и 3, что согласуется с вышеприведенными выводами о влиянии интенсивности подледных течений и более высокой температурой воды на теплообмен вода–лед. Поток тепла на станции 3 близок к потоку на станции 1, кратковременные его повышения связаны с приходом теплой воды из менее заснеженной северо-восточной части Южного Байкала (рис. 4).

Динамика роста толщины ледового покрова определяется соотношением между потоком тепла от нижней поверхности льда к его верхней границе и вертикальным переносом тепла из водной толщи. Более наглядно взаимосвязь потоков тепла в воде Q_{wat} и во льду Q_{ice} , а также скрытой теплоты фазового перехода Q_L на границе вода–лед для двух станций приведена на рис. 11. Для станции 1 доля потока тепла из воды в январе составляла $\leq 20\%$ от величины потока тепла во льду, а к концу измерений, несмотря на абсолютное сни-

жение величины, его доля превысила 50%. На станции 2 поток тепла из воды, напротив, составлял от 50 до 100% теплового потока во льду, вызывая остановку его нарастания, а начиная с марта он начал превышать его значения, что привело к активной деградации ледового покрова (рис. 5).

Первые оценки потока тепла (24 Вт/м^2) из воды в лед для Байкала получены в [22]. Предыдущие исследования авторов настоящей статьи в районе станции 3 показали, что поток тепла изменялся в диапазоне $2\text{--}11 \text{ Вт/м}^2$ в 2009 г. [35], $5\text{--}35 \text{ Вт/м}^2$ в 2012 г. [1] и $15\text{--}30 \text{ Вт/м}^2$ в 2014 г. Максимальные потоки зафиксированы в 2014 г. на станции 2 ($30\text{--}50 \text{ Вт/м}^2$), минимальные значения потока ($2\text{--}10 \text{ Вт/м}^2$) наблюдались в 2015 г. на станции 1. Для сравнения, Л. Бенгтссон и Т. Свенссон оценили поток тепла из воды в лед в ряде небольших шведских озер величинами от $1\text{--}2 \text{ Вт/м}^2$ в январе–феврале до $5\text{--}7 \text{ Вт/м}^2$ в марте–апреле [39]. Оценка теплового потока для оз. Паяярви (Pääjärvi) [53] дала величины 5 Вт/м^2 зимой и 12 Вт/м^2 в конце весны. По данным [62],

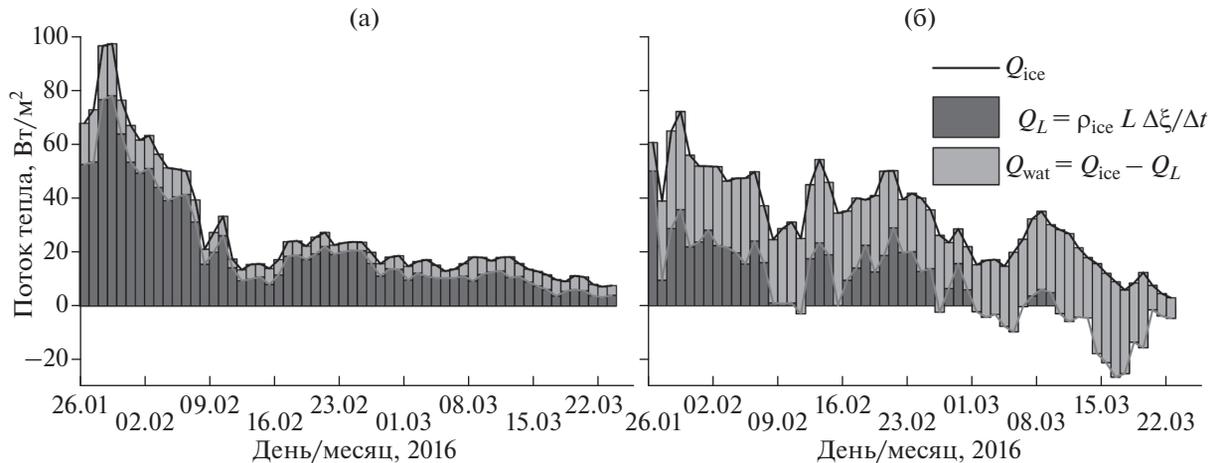


Рис. 11. Баланс потоков тепла на станциях 1 (а) и 2 (б).

тепловые потоки на оз. Вендюрском (Карелия, Россия) во время разрушения ледового покрова могут достигать 7–29 Вт/м².

Полученные авторами статьи оценки потоков тепла из воды в лед существенно выше, чем в малых озерах и изменяются почти на порядок в зависимости от скорости подледных течений. Данный результат демонстрирует значительную роль подледной циркуляции в формировании потока тепла на нижней границе льда и, как следствие, толщины ледового покрова в крупных водоемах. Генерируемая течениями сдвиговая неустойчивость — по сути, основной зимний механизм переноса тепла из водной толщи к нижней поверхности льда, так как доля потока тепла за счет конвекции при повышении минерализации в период интенсивного нарастания ледового покрова на Байкале не превышает 1 Вт/м² [10], а интенсивность турбулентного обмена за счет объемного поглощения солнечной радиации становится значительной только к весне.

ВЫВОДЫ

Для исследования вертикального тепломассообмена в системе вода–лед изготовлено специализированное оборудование. Экспериментальные данные позволили получить информацию о структуре пограничного слоя. Определена толщина вязкого ламинарного слоя подледной воды (1–5 мм). Положение границы переходного слоя к основной турбулентной водной массе изменяется в широких пределах (0.1–3 м от нижней кромки льда) и ощутимо зависит от скорости подледных течений. Численным решением обратной задачи Стефана получены вертикальные распределения эффективной теплопроводности,

значения которой на глубине 4 м достигают 10^{-5} – 10^{-3} м²/с.

Впервые проведено сопоставление величин плотности потока тепла, полученного разными методами: по толщине льда и тепловому потоку во льду, по градиенту температуры в ламинарном слое и решением обратной задачи модели динамики толщины ледового покрова. Значения, полученные разными методами, хорошо согласуются. Показано, что в разные годы и в разных районах озера плотность потока тепла из воды в лед варьирует в широких пределах (от 2 до 50 Вт/м²), что обусловлено главным образом интенсивностью подледных течений и температурой подледной воды. Таким образом, поток тепла из воды в лед может составлять от 5 до $\geq 100\%$ от величины потока тепла во льду; пренебрежение им при моделировании динамики толщины ледового покрова может привести к существенным ошибкам.

В сравнении с оценками, полученными предыдущими исследователями для малых озер, на Байкале могут наблюдаться как сравнимые потоки тепла из воды в лед, так и существенно большие, что согласуется с увеличенными на один–два порядка в силу значительных подледных течений величинами коэффициента эффективной теплопроводности и, как следствие, с меньшей толщиной вязкого ламинарного подслоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асламов И.А. и др. Оценка потока тепла на границе вода–лед на Байкале по экспериментальным данным // Докл. Академии наук. 2014. Т. 457. № 4. С. 477–480. <http://naukarus.com/j/doklady-akademii-nauk>.

2. Белолипецкий П.В., Генова С.Н., Грицко В.В. Компьютерная модель вертикальной структуры водоема // Вычислительные технологии. Т. 9. Вестн. КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2004. № 3. Вып. 42. Совместный выпуск. Ч. 1. С. 289–294.
3. Бородай Н.И. Материалы к изучению строения ледяного покрова Байкала // Тр. БЛС. 1939. Т. 79. С. 70–114.
4. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: Изд-во МГУ, 1987. 164 с.
5. Верболов В.И. Течения и водообмен в Байкале // Вод. ресурсы. 1996. Т. 23. № 4. С. 413–423.
6. Верболов В.И., Сокольников В.М., Шимараев М.Н. Гидрометеорологический режим и тепловой баланс озера Байкал. М.; Л.: Наука, 1965. 373 с.
7. Верещагин Г.Ю., Харкеевич Л.Ф. Ледяной покров Байкала в районе истока Ангары // Тр. БЛС. 1939. Т. 9. С. 45–69.
8. Воеводин А.Ф., Гранкина Т.Б. Численное моделирование роста ледяного покрова в водоеме // Сибирский журн. индустриальной математики. 2006. Т. IX. № 25.
9. Гольдман Н.Л. Классическое и обобщенное решение двухфазной граничной обратной задачи Стефана // Вычислительные методы и программирование. 2002. Т. 3. С. 133–143.
10. Гранин Н.Г. и др. Конвекция и перемешивание подо льдом озера Байкал // Сибирский экол. журн. 1999. № 6. С. 597–600.
11. Гранин Н.Г. и др. Турбулентное перемешивание вод озера Байкал в слое, непосредственно примыкающем ко льду, и его роль в развитии диатомовых водорослей // Докл. РАН. 1999. Т. 366. № 6. С. 835–839.
12. Гранин Н.Г. Окольцованный Байкал // Наука из первых рук. 2009. № 3. С. 22–23.
13. Гранин Н.Г. и др. Полевые исследования и некоторые результаты численного моделирования кольцевой структуры на льду озера Байкал // ДАН. 2015. Т. 461. № 3. С. 343–347.
14. Довгий Т.Н. Подводная солнечная радиация на Байкале. Новосибирск: Наука, 1977. 104 с.
15. Дыбовский В., Годлевский В. Физико-географические исследования на Байкале в 1869–1876 гг. // Тр. Восточно-Сибирского отделения Императорского русского географического общества. 1897. Т. 1. № 1. С. 1–62.
16. Жданов А.А., Гранин Н.Г., Шимараев М.Н. О механизмах генерации подледных течений в Байкале // Докл. РАН. 2001. Т. 377. № 3. С. 392–395.
17. Жданов А.А., Гранин Н.Г., Шимараев М.Н. Подледные течения Байкала (на основе новых экспериментальных данных) // География и природ. ресурсы. 2002. № 1. С. 79–83.
18. Колесников А.Г. Вычисление суточного хода температуры по тепловому балансу на его поверхности // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1954. № 2. С. 190–194.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Физматлит, 2015. 728 с.
20. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
21. Менишуткин В.В. Гидрология подледного слоя воды в Байкале // Тр. ЛИН СО АН СССР. 1964. Т. 5. № 25. С. 52–63.
22. Менишуткин В.В. Теплообмен через ледяной покров Южного Байкала // Тр. ЛИН СО АН СССР. 1964. Т. 5. № 25. С. 64–81.
23. Пивоваров А.А. Термика замерзающих водоемов. М.: Изд-во МГУ, 1972. 724 с.
24. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Изд-во УРСС, 2004. 248 с.
25. Сокольников В.М. Некоторые закономерности формирования и роста ледяного покрова (на примере озера Байкал) // Тр. БЛС. 1957. Т. 15. С. 58–64.
26. Сокольников В.М. О радиационных свойствах льда и снега и о некоторых явлениях ледового режима Малого моря (оз. Байкал) // Тр. БЛС. 1959. Т. 17. С. 104–107.
27. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
28. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: Учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.
29. Тресков А.А. О зависимости между наибольшей толщиной льда и температурой зимы на Байкале // Тр. Иркутской магнит.-метеорол. обсерватории. 1926. Т. 1. № 1. С. 72–79.
30. Цуриков В.Л. Некоторые замечания относительно формул нарастания ледяного покрова // Тр. Байкальской лимнол. ст. 1939. Т. 9. С. 115–124.
31. Шерстянкин П.П. Экспериментальные исследования подледного светового поля озера Байкал. М.: Наука, 1975. 92 с.
32. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
33. Шулейкин В.В. Физика моря. М.: Наука, 1968. 1083 с.
34. Ashton G.D. River and Lake Ice Engineering. Littleton: Water Resources Publications, 1986. 485 p.
35. Aslamov I.A. et al. Ice-water heat exchange during ice growth in Lake Baikal // J. Great Lakes Res. 2014. V. 40. № 3. P. 599–607.
36. Bengtsson L. Dispersion in ice-covered lakes // Nord. Hydrol. 1986. № 17. P. 151–170.
37. Bengtsson L. et al. Field investigation of winter thermo- and hydrodynamics in a small Karelian lake // Water. 1996. V. 41. № 7. P. 1502–1513.
38. Bengtsson L. Mixing in ice-covered lakes // Hydrobiologia. 1996. V. 322. № 1–3. P. 91–97.

39. *Bengtsson L., Svensson T.* Thermal regime of ice covered Swedish lakes // *Nord. Hydrol.* 1996. V. 27. № 1. P. 39–56.
40. *Bernhardt J. et al.* Lake ice phenology in Berlin—Brandenburg from 1947–2007: observations and model hindcasts // *Clim. Change.* 2012. № 112. P. 791–817.
41. *Colman J.A., Armstrong D.E.* Horizontal diffusivity in a small, ice-covered lake // *Limnol. Ocean.* 1983. № 28. P. 1020–1026.
42. *Duguay C.R. et al.* Ice-cover variability on shallow lakes at high latitudes: model simulations and observations // *Hydrol. Process.* 2003. V. 17. № 17. P. 3465–3483.
43. *Ellis C.R., Stefan H.G., Gu R.* Water temperature dynamics and heat transfer beneath the ice cover of a lake // *Limnol. Ocean.* 1991. V. 36. № 2. P. 324–335.
44. *Elo A.-R. et al.* The effects of climate change on the temperature conditions of lakes // *Boreal Environ. Res.* 1998. V. 3. P. 137–150.
45. *Elo A.-R., Vavrus S.J.* Ice modeling calculation, comparison of the PROBE and LIMNOS models // *Selected Articles from the Proceedings of 27th Congress of the International Association of Theoretical and Applied Limnology.* Verch. Internat. Verein. Limnology. V. 27. Dublin, 2000. P. 2816–2819.
46. *Fang X., Ellis C.R., Stefan H.G.* Simulation and observation of ice formation (freeze-over) in a lakes // *Cold Reg. Sci. Technol.* 1996. V. 24. P. 129–145.
47. *Farmer D.M.* Penetrative convection in the absence of mean shear // *Q.J.R. Meteorol. Soc.* 1975. V. 101. № 430. P. 869–891.
48. *Forrest A.L. et al.* Convectively driven transport in temperate lakes // *Limnol. Oceanogr.* 2008. V. 53. № 5. Pt 2. P. 2321–2332.
49. *Forrest A.L. et al.* A cyclonic gyre in an ice-covered lake // *Limnol. Oceanogr.* 2013. V. 58. № 1. P. 363–375.
50. *Fujisaki A. et al.* Model-simulated interannual variability of Lake Erie ice cover, circulation, and thermal structure in response to atmospheric forcing, 2003–2012 // *J. Geophys. Res. Ocean.* 2013. V. 118. № 9. P. 4286–4304.
51. *Granin N.G. et al.* Turbulent mixing under ice and the growth of diatoms in Lake Baikal // *Verh. Internat. Verein. Limnol.* 2000. V. 27. P. 2812–2814.
52. *Harleman D.R.F.* Hydrothermal modeling of reservoirs in cold regions: status and research needs // *Proc. Cold Reg. Hydrol. Symp. AWRA.* Fairbanks, 1986. P. 39–49.
53. *Jakkila J. et al.* Radiation transfer and heat budget during the ice season in Lake Pääjärvi, Finland // *Aquat. Ecol.* 2009. V. 43. № 3. P. 681–692.
54. *Jewson D.H. et al.* Effect of snow depth on under-ice irradiance and growth of *Aulacoseira baicalensis* in Lake Baikal // *Aquat. Ecol.* 2009. V. 43. № 3. P. 673–679.
55. *Karman T. von.* Turbulence and Skin Friction // *J. Aeronaut. Sci.* 1934. V. 1. № 1. P. 1–20.
56. *Kirillin G., Terzhevik A.* Thermal instability in freshwater lakes under ice: Effect of salt gradients or solar radiation? // *Cold Reg. Sci. Technol.* 2011. V. 65. № 2. P. 184–190.
57. *Kirillin G.B. et al.* Axisymmetric circulation driven by marginal heating in ice-covered lakes // *Geophys. Res. Lett.* 2015. V. 42. № 8. P. 2893–2900.
58. *Launiainen J., Cheng B.* Modelling of ice thermodynamics in natural water bodies // *Cold Reg. Sci. Technol.* 1998. V. 27. № 3. P. 153–178.
59. *Leppäranta M.* A growth model for black ice, snow ice and snow thickness in subarctic basins // *Nord. Hydrol.* 1983. V. 14. № 2. P. 59–70.
60. *Leppäranta M.* A review of analytical models of sea-ice growth // *Atmosphere-Ocean.* 1993. V. 31. № 1. P. 123–138.
61. *Leppäranta M.* Modelling the formation and decay of lake ice // *The Impact of Climate Change on European Lakes.* 2010. <http://www.springer.com/us/book/9789048129447>.
62. *Leppäranta M., Terzhevik A., Shirasawa K.* Solar radiation and ice melting in Lake Vendyurskoe, Russian Karelia // *Hydrol. Res.* 2010. V. 41. № 1. P. 50–62.
63. *Leppäranta M., Usikivi J.* The annual cycle of Lake Pääjärvi ice // *Lammi Notes.* 2002. V. 29. P. 4–9.
64. *Leppäranta M., Wang K.* The ice cover on small and large lakes: scaling analysis and mathematical modeling // *Hydrobiologia.* 2008. V. 599. № 1. P. 183–189.
65. *Likens G.E., Ragotzkie R.A.* Vertical water motions in a small ice-covered lake // *J. Geophys. Res.* 1965. V. 70. № 10. P. 2333–2344.
66. *Liston G.E., Hall D.K.* An energy-balance model of lake-ice evolution // *J. Glaciol.* 1995. V. 41. № 138. P. 373–382.
67. *Magnuson J.J. et al.* Historical Trends in Lake and River Ice Cover in the Northern Hemisphere // *Sci.* 2000. V. 289. № 5485. P. 1743–1746.
68. *Malm J.* Some properties of currents and mixing in a shallow ice-covered lake // *Water Resour. Res.* 1999. V. 35. № 1. P. 221–232.
69. *McDougall T.J., Barker P.M.* Getting started with TEOS-10 and the Gibbs Seawater (GSW) Oceanographic Toolbox. 2011. http://www.teos-10.org/pubs/Getting_Started.pdf.
70. *Ménard P. et al.* Simulation of ice phenology on a large lake in the Mackenzie River Basin (1960–2000) // *59th Eastern Snow Conference.* Stowe, Vermont, USA, 2002. P. 3–12.
71. *Ménard P. et al.* Simulation of ice phenology on Great Slave Lake, Northwest Territories, Canada // *Hydrol. Process.* 2002. V. 16. № 18. P. 3691–3706.
72. *Mironov D.* Radiatively driven convection in ice-covered lakes: Observations, scaling, and a mixed layer model // *J. Geophys. Res.* 2002. V. 107. № C4. P. 3032.
73. *Onuki A., Shibuya Y., Kozaki S.* First-order phase transition with a moving boundary. II. Theory of ice formation // *J. Low Temp. Phys.* 1974. V. 15. № 1–2. P. 161–168.

74. *Oveisy A., Boegman L., Imberger J.* Three-dimensional simulation of lake and ice dynamics during winter // *Limnol. Oceanogr.* 2012. V. 57. № 1. P. 1–15.
75. *Patterson J.C., Hamblin P.F.* Thermal simulation of a lake with winter ice cover // *Limnol. Oceanogr.* 1988. V. 33. № 3. P. 323–338.
76. *Pieters R., Lawrence G.A.* Effect of salt exclusion from lake ice on seasonal circulation // *Limnol. Oceanogr.* 2009. V. 54. № 2. P. 401–412.
77. *Pushistov P.Y., Ievlev K.V.* Numerical eddy-resolving model of non-stationary penetrative convection in spring solar heating of ice-covering lakes // *Bull. Inst. Comput. Math. Math. Geophys.* 2000. V. 5. P. 55–63.
78. *Rizk W., Kirillin G., Leppäranta M.* Basin-scale circulation and heat fluxes in ice-covered lakes // *Limnol. Oceanogr.* 2014. V. 59. № 2. P. 445–464.
79. *Speranskaya A.A.* Turbulent processes within the “sub-ice” layer of a basin // *Int. Oceanogr. Congress. N.Y.*; Washington: AAAS, 1959. P. 422–426.
80. *Stefan J.* Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über Eisbildung im Polarmeere // *Ann. Phys. 3rd Ser.* 1891. V. 42. P. 269–286.
81. *Svensson T.* Temperature and Heat Turnover in Lakes during the Winter // *Swedish Council for Building Research. Stockholm, 1987. P. 153.*
82. *Wang J., Hu H., Schwab D.* Development of the Great Lakes Ice-circulation Model (GLIM): Application to Lake Erie in 2003–2004 // *J. Great Lakes Res.* 2010. V. 36. № 3. P. 425–436.